



# Transfert d'orbites en poussée faible

Andrei Ivanov

## ► To cite this version:

| Andrei Ivanov. Transfert d'orbites en poussée faible. RR-4623, INRIA. 2002. inria-00071962

**HAL Id: inria-00071962**

**<https://inria.hal.science/inria-00071962>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# *Transfert d'orbites en poussée faible*

Andrei IVANOV

**N° 4623**

octobre 2002

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



*rapport  
de recherche*



# Transfert d'orbites en poussée faible

Andrei IVANOV\*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet MIAOU

Rapport de recherche n° 4623 — octobre 2002 — 40 pages

**Résumé :** Le positionnement du problème de transfert en poussée faible est amené. On propose l'aperçu des méthodes optimales et suboptimales pour résoudre ce problème. Résultats de la simulation par une méthode optimale et une méthode de la stabilisation de Lyapunov présentent les transferts les plus courants.

**Mots-clés :** Transfert d'orbite, Contrôle optimal, Stabilisation de Lyapunov

\* réalisé sous la direction de J.-B. Pomet.  
Email: [Jean-Baptiste.Pomet@sophia.inria.fr](mailto:Jean-Baptiste.Pomet@sophia.inria.fr).

# Low thrust orbit transfer

**Abstract:** The Low thrust orbit transfer's problem is studied. The survey describe existing optimal and suboptimal methods for resolving this problem, numerical results for most common transfers are included as well.

**Key-words:** Orbital transfer, optimal control, Lyapunov control system design

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Problème de rendez-vous orbital en poussée faible . . . . .	5
1.2.1	Équations du mouvement . . . . .	6
1.2.2	Conditions aux limites . . . . .	8
1.2.3	Contraintes sur la commande . . . . .	9
1.2.4	Critères à minimiser . . . . .	11
1.2.5	Objectif de la résolution du problème de rendez-vous . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Méthodes existantes pour la résolution du problème de transfert ou de rendez-vous orbitaux</b>	<b>13</b>
2.1	Commande optimale . . . . .	14
2.1.1	Préliminaires . . . . .	14
2.1.2	Méthodes Indirectes: rappels de contrôle optimal . . . . .	16
2.1.3	Méthodes Directes . . . . .	19
2.2	Méthodes non optimales a priori . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>27</b>
3.0.1	Comparaison les résultats de la stabilisation avec commande optimale . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>



# Chapitre 1

## Position du problème

### 1.1 Introduction

L'utilisation, sur des satellites, de moteurs électriques de très bon rendement mais de poussée faible posent, depuis quelque temps déjà, de nouveaux problèmes pour les chercheurs. L'arrêt de l'utilisation de moteurs chimiques permettrait de réduire la masse de carburant, mais demanderait d'effectuer à l'aide de moteurs électro-ioniques non seulement le maintien à poste —ce qui se fait depuis les années 70— mais aussi la *mise à poste*. La commande devient plus complexe à cause du fait que la durée du processus de transfert est accrue.

Avant de présenter au chapitre 2 les approches proposées dans la littérature pour résoudre ce problème, nous le posons ici en détail. Il est à noter que, à part la faible amplitude du contrôle, la “faible poussée” ne change guère la formulation du problème, bien qu'elle change beaucoup sa résolution.

### 1.2 Problème de rendez-vous orbital en poussée faible

Dans cette première partie nous allons présenter: la dynamique d'un satellite en poussée faible, les conditions aux limites et les contraintes particulières qui correspondent à notre étude, puis nous allons formuler le problème de la commande optimale pour divers critères.



### 1.2.1 Équations du mouvement

La description de mouvements spatiaux nécessite six paramètres (dans l'espace Euclidien  $X, Y, Z$  pour déterminer la position et  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  pour la vitesse). Cependant, géométriquement, il est préférable d'utiliser d'autres paramètres dits "orbitaux"  $(a, e, i, \Omega, w, v)$ .

$a$  - le demi grand axe

$e$  - l'excentricité

$i$  - l'inclinaison

$\Omega$  - l'ascension droite du noeud ascendant

$w$  - l'argument du périégée

$v$  - l'anomalie vraie

Notons que les cinq premiers paramètres décrivent la forme l'orbite et le sixième décrit la position du satellite sur l'orbite. Cela signifie que si le satellite se trouve sur son orbite (le mouvement libre) seulement l'anomalie vraie change sa valeur. Hélas, dans le cas une orbite circulaire l'ascension droite du noeud ascendant n'est plus définie, alors la singularité est apparue. L'autre type des éléments dits "équinoxiaux" élimine ce problème.

$$\begin{cases} a = a \\ e_x = e \cos(w + \Omega) \\ e_y = e \sin(w + \Omega) \\ h_x = \tan(1/2 i) \cos(\Omega) \\ h_y = \tan(1/2 i) \sin(\Omega) \end{cases}$$

À l'avenir, nous adoptons ces éléments pour établir la dynamique d'un engin.

Les équations de Gauss décrivent le mouvement du satellite sur l'orbite soumis à des forces perturbatrices. Les dernières se présentent dans le repère dit "orbital local" qui se déplace avec l'engin. Il existe 2 types de repères: "tangential/normal"  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{W})$  et "radial/normal"  $(\vec{Q}, \vec{N}, \vec{W})$ . Nous allons adopter le repère "tangential/normal" qui créé par la composante tangentielle du vec-

teur de la vitesse, le vecteur qui appartient au plan orbital et le vecteur normal à ce plan.

En fonction des éléments orbitaux et du repère local choisi, il existe plusieurs variantes des équations de Gauss (Battin, 1987), (Carrou, 1995). On choisit le repère "tangential/normal" ( $\vec{T}, \vec{N}, \vec{W}$ ) parce qu'il permet de définir l'orientation d'un vecteur par rapport au vecteur vitesse du satellite de façon plus simple. C'est important dans le cas de contraintes sur la direction de poussée. Désignons par

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_T \\ F_N \\ F_W \end{pmatrix}$$

le vecteur de poussée exprimé dans ce repère. Alors, les équations prennent la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{BF_T}{Am} \\ \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{Dm} \left( \frac{2(e_x + \cos L)D}{B} F_T - C.F_N - e_y(h_x \sin L - h_y \cos L)F_W \right) \\ \frac{de_y}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{Dm} \left( \frac{2(e_y + \sin L)D}{B} F_T + E.F_N + e_x(h_x \sin L - h_y \cos L)F_W \right) \\ \frac{dh_x}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{Dm} (1 + h_x^2 + h_y^2) \cos(L)F_W \\ \frac{dh_y}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{Dm} (1 + h_x^2 + h_y^2) \sin(L)F_W \\ \frac{dL}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{D^2}{A^3} + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{A}{Dm} (h_x \sin L - h_y \cos L) F_W \end{array} \right. \quad (1)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2} \\ B = \sqrt{1 + 2e_x \cos L + 2e_y \sin L + e_x^2 + e_y^2} \\ C = \frac{2e_x e_y \cos L - \sin L(e_x^2 - e_y^2) + 2e_y + \sin L}{B} \\ D = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ E = \frac{2e_x e_y \sin L - \cos L(e_x^2 - e_y^2) + 2e_x + \cos L}{B} \end{array} \right.$$

Le changement de masse du satellite est donnée par:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{F(\mathbf{X}, t)}{g_0 I_{sp}} \quad (2)$$

où  $g_0$  est l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer,  $Isp$  est l'impulsion spécifique du moteur et où  $F(\mathbf{X}, t)$  est le module de poussée :

$$F = \sqrt{F_T^2 + F_N^2 + F_W^2}.$$

Distinguons le module et l'orientation de la poussée :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_T \\ F_N \\ F_W \end{pmatrix} = F \mathbf{u} ; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_T \\ u_N \\ u_W \end{pmatrix}, \quad u_T^2 + u_N^2 + u_W^2 = 1.$$

Notons  $\xi$  et  $\eta$  les angles sphériques de  $\mathbf{u}$  :

$$\begin{cases} u_T = \cos \xi \cos \psi \\ u_N = \cos \xi \sin \psi \\ u_W = \sin \xi \end{cases} \quad (3)$$

où  $\xi$  désigne l'angle entre le vecteur de direction de forces perturbatrices et le plan orbital  $(\vec{T}, \vec{N})$  et  $\psi$  l'angle entre sa projection sur le plan orbital et le vecteur de vitesse.

Finalement on va présenter la dynamique du satellite (1),(2), du point de vue de la théorie de la commande. Le vecteur d'état  $\mathbf{X} = (a, e_x, e_y, h_x, h_y, L, m)^T$  comprend 6 paramètres orbitaux et la masse de l'engin. Les trois composantes du vecteur de poussée  $\vec{F}$  sont les commandes du système. Alors, dans la forme condensée le système (1), (2) se ré-écrit :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{F}_0(\mathbf{X}) + \mathcal{F}_m(\mathbf{X})F + \mathcal{F}(\mathbf{X})F\mathbf{u} \quad (4)$$

où  $(\mathbf{X}, F, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^7 \times [0, +\infty) \times \mathbb{S}^2, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_m, \mathcal{F} : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ . Notons également, que le système (4) est affine en la commande si l'on considère que  $F$  est fixé, et que le système où l'on ne considère que les variables spatiales (les six premières composantes du vecteur d'état  $\mathbf{X}$ ). Ce fait sera important pour l'emploi de méthodes de stabilisation.

### 1.2.2 Conditions aux limites

Le problème de rendez-vous est caractérisé par les positions exactes dans les moments initiaux et finaux. Le vecteur  $\mathbf{X}$  au moment  $t_0$  est entièrement donné.

$\mathbf{X}(t_0) = (a_0, e_{x0}, e_{y0}, h_{x0}, h_{y0}, L_0, m_0)$ . La position finale est donnée par les six premiers paramètres de  $\mathbf{X}(t_f)$ . La masse finale  $m_f$  est libre. Les conditions sur la position finale du satellite s'écrivent :

$$\begin{aligned} a(t_f) - a_f &= 0 \\ e_x(t_f) - e_{xf} &= 0 \\ e_y(t_f) - e_{yf} &= 0 \\ h_x(t_f) - h_{xf} &= 0 \\ h_y(t_f) - h_{yf} &= 0 \\ L(t_f) - L_f &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

On précise un cas particulier, mais important, quand l'orbite finale est géostationnaire. Alors, la longitude finale est en relation par rapport au temps final.

Donnons deux définitions:

La *longitude terrestre*  $\lambda$  représente l'angle que fait le méridien local par rapport au méridien de Greenwich.

Le *temps sidéral*  $T_s$  représente l'angle que fait le méridien de Greenwich par rapport au vecteur  $\vec{I}$  du repère inertiel géocentrique  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  (Montenbruck & Gill, 2000)

$$T_s(t) = \theta_0 + \theta_1(t - t_0)$$

où  $\theta_0$  - le temps sidéral à l'instant  $t_0$

$\theta_1$  - la vitesse angulaire de la Terre.

Alors, la position finale du satellite par rapport à la Terre  $L$  est reliée avec la longitude terrestre  $\lambda(t_f)$  et le temps sidéral  $T_s(t)$  selon l'expression suivante:  $\lambda(t_f) = L(t_f) - T_s(t_f)$ . Finalement, la contrainte dans le cas d'une orbite géostationnaire s'écrit

$$L(t_f) = \theta_1 t_f + (\lambda_f + \theta_0 - \theta_1 t_0)$$

### 1.2.3 Contraintes sur la commande

La manoeuvre que nous allons étudier demande beaucoup plus de temps que celle pour un moteur chimique. Cette circonstance nous oblige à prendre

en compte quelques phénomènes supplémentaires:

**Éclipse Solaire:** A cause de leur limitation technologique, les moteurs ioniques ne peuvent travailler que dans la phase de visibilité directe du soleil, mais au cours de plusieurs révolutions il est incontestable que la satellite entre dans l'ombre de la Terre. Cette contrainte sous-entend que la commande égale zéro ( $F(\mathbf{X},t) \equiv 0$ ) pendant l'éclipse solaire. Pour décrire cette partie de trajectoire, il est nécessaire de déterminer la forme de l'ombre de la Terre. Un modèle simple (en forme du cylindre) a été proposé par Escabal (fig.1) .

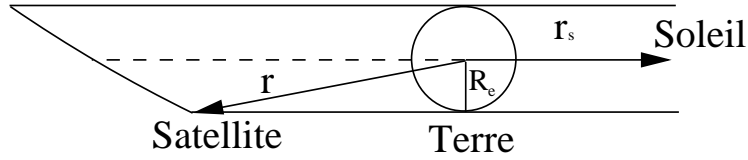


FIG. 1.1 – *Modèle de l'éclipse solaire*

Dans la forme analytique l'équation d'un cylindre se présente dans la forme suivante (Edelbaum, Sackett, & Malchow, 1973):

$$S(\mathbf{X},t) \equiv (1 - X_s^2)X^2 + (1 - Y_s^2)Y^2 + (1 - Z_s^2)Z^2 - 2(X_s Y_s XY + X_s Z_s XZ + Y_s Z_s YZ) - R_e^2 = 0 \quad (6)$$

où  $X, Y, Z$  - coordonnées du vecteur position du satellite,  $X_s, Y_s, Z_s$  - coordonnées du vecteur position du Soleil,  $R_e$  - rayon de la Terre.

Le satellite se trouve dans l'ombre de la Terre si  $S(\mathbf{X},t) < 0$  et  $K(\mathbf{X},t) = X_s X + Y_s Y + Z_s Z < 0$ . L'équation (5) est vérifiée en moments d'entre et de sortie du satellite dans l'ombre de la Terre. Cette contrainte forme une domaine  $\mathcal{C}_1(t)$  telle que :

$$F(\mathbf{X},t) \equiv 0 \text{ si } \mathbf{X} \in \mathcal{C}_1(t) \quad (7)$$

or

$$\mathcal{C}_1(t) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^7 : S(\mathbf{X},t) < 0, K(\mathbf{X},t) < 0\} \quad (8)$$

Bien que le modèle en forme cylindrique soit assez approximatif, il donne les résultats admissible dans la plupart d'application (Edelbaum et al., 1973), (Ferrier & Epenoy, 2001), (Geffroy, 1997), (Geffroy & Epenoy, 1997). Dans

le cas d'une contrainte plus rigoureuse les modèles sophistiqués peuvent être utilisés (Carrou, 1995),(Neta & Vallado, 1998).

### 1.2.4 Critères à minimiser

L'optimisation des rendez-vous peut être accomplie par les critères différents. Les deux critères possibles ce sont :

- le minimum de temps de manoeuvre  $J = \min \int_0^{t_f} dt$
- le minimum de consommation de carburant  $J = \min(m_0 - m_f)$ .

Notons que le temps final  $t_f$  est libre dans le premier cas, tandis que il est fixé dans le deuxième.

### 1.2.5 Objectif de la résolution du problème de rendez-vous

Le but de notre travail est de créer une loi de commande qui permet d'accomplir le rendez-vous en 6 paramètres orbitaux pour le système (4),(5) soumis aux contraintes sur la commande (13).

On va envisager 2 type de commande à élaborer :

- créer une commande sous optimale (à la base de fonction de Lyapunov) dans la forme  $\vec{F}(\mathbf{X},t)$  qui effectue le rendez-vous en durée limitée et prend en compte les contraintes éventuelles telles que l'arête les moteurs pour des raisons techniques ou une correction nécessaire d'orbite au cours de manoeuvre.
- créer la commande optimale (à la base du principe de Pontryagin) dans la forme  $F(t)$  pour le système ouvert, qui vérifie un des critères §2.4. (dans ce cas les contraintes se déterminent *a priori*)



## Chapitre 2

# Méthodes existantes pour la résolution du problème de transfert ou de rendez-vous orbitaux

Toutes les méthodes peuvent être séparées en deux grandes classes. Le premier type donne la solution exacte de problèmes optimaux et basé sur le principe de Pontryagin ou la programmation non-linéaire. Très souvent la résolution de ce type de problèmes est assez sophistiquée, demande une grande proportion de calcul et souffre de insuffisance de robustesse. Vus ces problèmes, l'implémentation de ces méthodes à bord du satellite est très problématique. Alors, il est désirable de trouver des approches sous-optimales, mais robustes et simples qui permettent leur réalisation en temps réel. En même temps, l'utilisation de méthodes optimales est nécessaire pour le contrôle de la proximité et du coût des solutions finales.

Dans notre bref aperçu nous présenterons ces deux types de méthodes. Nous allons commencer par des méthodes optimales, présenter l'idée de résolution de problème numérique et montrer les ressemblances entre la méthode de Pontryagin et la méthode de la programmation non linéaire. Pour une grande part, cette section est inspiré par l'article de J. Betts (Betts, 1998).



## 2.1 Commande optimale

Avant de commencer à décrire des approches différentes, on va rappeler très vite des résultats généraux de programmation non-linéaire (NLP), la programmation quadratique (QP) et "sequential quadratic programming" (SQP) qui utilisent tous la méthode itérative de Newton.

### 2.1.1 Préliminaires

Présentons, dans le formalisme proche de celui de (Betts, 2001) le problème de minimisation d'une fonction  $F(\mathbf{x})$  de  $n$  variables sous  $m$  contraintes  $c(\mathbf{x}) = 0$  (avec  $n \geq m$ ). Le Lagrangien s'écrit

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(\mathbf{x}) - \lambda^T c(\mathbf{x}) \quad (1)$$

On va approximer le Lagrangien par sa série de Taylor a l'ordre 2 au point  $x$ :

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) &= L(x, \lambda) + \frac{\partial L}{\partial \bar{x}}(\bar{x} - x) + \frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}}(\bar{\lambda} - \lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \bar{x}}(\bar{x} - x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\bar{x} - x)^T \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x} \partial \bar{\lambda}}(\bar{\lambda} - \lambda) + \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \bar{\lambda}}(\bar{\lambda} - \lambda)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Minimiser  $\tilde{L}$  est un problème de programmation quadratique<sup>1</sup>. Les conditions nécessaires pour que le point  $(x^*, \lambda^*)$  soit un extremum du Lagrangien s'écrivent:

$$\nabla_x \tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla_\lambda \tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (4)$$

---

1. Le problème de "Programmation Quadratique (QP)" (Betts, 2001) consiste plus généralement a minimiser une expression de la forme

$$\frac{1}{2} p^T H_L p + g^T p$$

sous les contraintes linéaires

$$Gp = -c$$

et le système KKT donne la condition nécessaire de l'extrême.

Prenant les gradients de (2) par rapport de  $\bar{x}$  et  $\bar{\lambda}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{x}} \tilde{L} &= \frac{\partial F(x)}{\partial \bar{x}} + \lambda \frac{\partial c(x)}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\partial^2 F(x)}{\partial \bar{x}^2} - \lambda \frac{\partial^2 c(x)}{\partial \bar{x}^2} \right) (\bar{x} - x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial c(x)}{\partial \bar{x}} (\bar{\lambda} - \lambda) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla_{\bar{\lambda}} \tilde{L} = -c(x) - \frac{\partial c(x)}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - x) \quad (6)$$

Introduisons les notations:

$$g^T = (\nabla_x F(x))^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]^T$$

$$G = \frac{\partial c(x)}{\partial \bar{x}}$$

$$H_L = \left( \frac{\partial^2 F(x)}{\partial \bar{x}^2} - \lambda \frac{\partial^2 c(x)}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

Alors, les conditions (3), (4) s'écrivent dans la forme suivante :

$$0 = g - G^T \lambda + H_L (\bar{x} - x) - G^T (\bar{\lambda} - \lambda), \quad (7)$$

$$0 = c - G(\bar{x} - x). \quad (8)$$

ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} H_L & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix} \quad (9)$$

le dernier système est connu comme système de Kuhn-Tucker (KT) ou de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ou  $p$  est "search direction"  $p \equiv \bar{x} - x$  pour le pas  $\bar{x} = x + p$ .  $\bar{\lambda}$  correspond  $\bar{x}$  c'est-à-dire le valeur au nouveau point.

Bien sur, dans le cas où l'on minimise vraiment une expression quadratique  $\tilde{L}$ , la méthode de Newton converge en un pas.

Dans le cas général (NLP), le problème est plus complexe, mais la procédure de la résolution reste très proche de celle que l'on vient de décrire. On essaye d'aborder le NLP par la résolution d'une suite de sous-problèmes

QP. Cette approche s'appelle le SQP (sequential quadratic programming). A chaque itération nous avons  $p$  et  $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \lambda$  et une approximation suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} p \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (12)$$

Le paramètre  $\alpha \in [0,1]$  doit être ajusté pour garantir la convergence; il est par exemple choisi selon la condition suffisante donnée par Goldstein-Armijo.

Bien sur, nous n'avons présenté que le concept de base. (pour obtenir plus d'information voir (Gill, Murray, & Wright, 1981)). Nous avons cité cette méthode parce qu'elle joue un rôle principal dans les paragraphes suivants quand nous allons étudier le problèmes de la commande optimale, où, après discrétisation, la fonction  $F(X)$  sera notre critère à optimiser et  $c(X)$  sera la dynamique du systèmes. Notons que le choix d'une voie pour créer  $c(x)$  assigne souvent la différences entre méthodes.

### 2.1.2 Méthodes Indirectes: rappels de contrôle optimal

On va formuler (voir (Bryson, Arthur, & Ho, 1975)) le problème de la commande optimale dans la forme de Mayer. La fonction de coût  $\phi[x(t_f), t_f]$ . La dynamique du système est donnée par l'équation :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (13)$$

sur l'intervalle  $t \in [0, t_f]$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$  avec les conditions initiales :

$$\mathbf{x}(t_0) = x_0 \quad (14)$$

et les conditions finales :

$$\Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (15)$$

avec  $\Psi : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^q$

Écrivons par analogie avec le (1) le Lagrangien pour les contraintes (13-15):

$$L = \phi + \nu^T \Psi + \int_0^{t_f} \lambda^T \left[ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \frac{dx}{dt} \right] dt, \quad (16)$$

où le multiplicateur  $\nu \in \mathcal{R}^q$  et les variables adjointes  $\lambda(t) \in \mathcal{R}^n$

Les conditions nécessaires du premier ordre demandent que  $L$  soit stationnaire par rapport  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  et  $t_f$ . Ceci s'écrit de la manière suivante: Pour les variables d'adjointes :

$$\frac{d\lambda}{dt} = F(x,u) \text{ où } F(x,u) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (17)$$

avec les conditions aux bords

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} \text{ où } \Phi = \phi + \nu^T \Psi \quad (18)$$

Quant à  $u$ , la condition prend la forme:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (19)$$

où l'Hamiltonien est défini par

$$H(x,u,\lambda) = \lambda^T f .$$

Le principe du maximum de Pontryagin (Pontryagin, Boltjanskiï, Gamkrelidze, & Mitchenko, 1974) donne la condition plus forte suivante :

$$u^* = \arg \min H \quad (20)$$

qui reste même valable avec des contraintes quelconques sur le contrôle.

Au temps  $t_f$  nous avons la condition de transversalité :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \lambda(t_f)^T f[x(t_f), u(t_f)] = 0 \quad (21)$$

Les équations (13,15,19) s'appellent le système d'Euler-Lagrange. Si l'équation (19) peut être résolue explicitement sous la forme  $u = u^*(x,\lambda)$ , il reste les équations (13,17) avec les conditions initiales (14), les conditions finales (15), les conditions aux bords (18) et les conditions de transversalité (21). Le dernier problème est connu comme TPBVP ("Two Points Boundary Value Problem"). Il a  $2n$  variables  $x,\lambda$  et le temps final  $t_f$ .

Faisons trois remarques :

- Le temps  $t_f$  peut être fixé ou rester libre alors nous pouvons transférer le problème vers le premier (temps fixé) par le nouvel variable  $x_{n+1} = t_f$ ,

- Si l'équation (19) n'est pas résolu par rapport  $u$ , nous avons un sgotême algébro-différentiel (DAE) qui peut être résolu par la méthode linéaire à la base de BDF (backward differentiation formula) proposé par Gear,
- Notons également que le Hamiltonien est une constante du mouvement du système d'Euler-Lagrange. Cette propriété est important pour le travail analytique (Bryson et al., 1975).

### Remarques sur les méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes de résolution du TPVBP. Parmi elles, les méthodes sont développées expressément pour le système d'Euler-Lagrange (comme exemple : la méthode des gradients (Pytlak, 1999)) où des approches plus générales, citons la méthode du tir. La dernière, quant à elle, il semble [est] la plus répandue (Edelbaum et al., 1973), (Ferrier & Epenoy, 2001), (Geffroy & Epenoy, 1997), (Tebbani, Bertrand, Bernussou, Racois, & Romero, 2001).

L'idée principale de cette méthode est la suivante : supposer les valeurs indéterminés pour 2 bords, intégrer le système, de façon itérative corriger la supposition pour que les conditions aux bords soient vérifiées. Le problème de minimisation de l'écart final s'écrit dans les termes du §2.1.1 avec :

$$\left| \begin{array}{l} x = \{\lambda(t_0), t_f\} \\ c(x) = \left[ \begin{array}{c} \Psi[X(t), t] \\ \lambda(t) - \Phi_X^T \\ \Phi_t + H \end{array} \right] \Big|_{t=t_f} \\ F(x) \equiv 0 \end{array} \right| \quad (22)$$

Faisons une remarque concernant (22) : le problème consiste à trouver  $(\lambda, t_f)$  tels que le Lagrangien  $L = \lambda c(x)$  ait un extremum  $(\lambda^*, t_f^*)$ . La condition (4) donne

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow c(x) = 0$$

Dans ce cas, les conditions (15), (18), (21) sont vérifiées, alors, le problème (22) est une formulation particulière du problème NLP § 2.1.1.

La majeure difficulté de cette méthode est le problème d'initialisation car le système d'Euler-Lagrange est très sensible vers une conjecture initiale (Bryson et al., 1975). Cet obstacle peut être atténué un peu par division l'intervalle

$t \in [0, t_f]$  aux sous intervalles. Alors, le problème a plus grand domaine de convergence par rapport à la condition initiale servant à initialiser l'optimisation, mais la dimension de problèmes s'augmente puisque les contraintes des accordances entre sous intervalles doivent être ajoutées. Cette approche appelée 'tir multiple' ("multiple shooting"), est utilisée dans (Bertrand, 2001).

### 2.1.3 Méthodes Directes

L'alternative principale de méthodes présentées au-dessus est l'approche directe. Tandis que les méthodes indirectes cherchent à approcher par des méthodes numériques les solutions du système d'Euler-Lagrange, les méthodes directes n'utilisent ni condition d'optimalité (17), ni équation adjointe (19), mais appliquent directement les méthodes de programmation mathématique à une approximation discrète de la dynamique (problème d'optimisation de dimension finie), d'où son nom 'direct'. Il y a plusieurs variantes de ces méthodes. On peut distinguer 'direct shooting' (Betts, 1998), méthode de la collocation (Hargraves & Paris, 1987), 'multiple shooting' (Gath & Well, 2001), (Spencer & Culp, 1995) méthode de la transcription (Enright, 1991). La dernière est apparemment la plus répandue et elle a plusieurs réalisations dans les logiciels de l'optimisation de trajectoires (OTIS par Hargraves et Paris (Hargraves & Paris, 1987), SOCS développé au Boing (Betts, 1993), (Betts, 1994), ALTOS par L'agence Spatiale Européenne (Gath & Well, 2001)).

En bref, nous allons présenter les différences entre méthodes.

- a/ **Transcription directe.** L'idée de base consiste à remplacer la dynamique du système par son approximation dans un maillage. Très souvent, on utilise un schéma d'Euler :

$$x_{n+1} - x_n - hf(x_n, u_n) = \zeta_n \quad (23)$$

Alors, nous obtenons le problème d'optimisation avec des contraintes non linéaires (23), Les paramètres d'optimisation  $X = \{x_n, u_n, t_f\}$ , le critère  $\phi$  et les conditions (15) dépendent de l'état final et du temps final. Les contraintes (23) sous-entendent l'accomplissement  $\zeta_n = 0$  dans un chaque point du maillage. Bien sur que la méthode d'Euler puisse être remplacée par l'autre (par exemple, par règle de Runge-Kutte, Hermite-Simpson et

etc.) Ainsi, dans les termes de §1 le problème s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} x = \{x_1, u_1, \dots, x_N, u_N\} \\ c(x) = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{N-1} \\ \Psi_{t_f} \end{bmatrix} \\ F(x) = \phi \end{array} \right. \quad (24)$$

- b/ Méthode de la collocation.** Elle consiste à décomposer l'intervalle  $[t_0, t_f]$  aux segments et l'approximation de la solution par les polynômes en chaque segments. La méthode a été proposé par Hargraves et Paris (Hargraves & Paris, 1987). Dans la version originale elle utilise un polynôme d'Hermite  $\hat{x} = C_0 + C_1 S + C_2 S^2 + C_3 S^3, S \in [0,1]$  pour l'état est l'approximation linéaire pour la commande. Les coefficients  $C_i$  sont choisis de manière que  $\hat{x}(0) = x_n, \hat{x}(1) = x_{n+1}, \frac{d\hat{x}}{dt(0)} = \dot{x}_n, \frac{d\hat{x}}{dt(1)} = \dot{x}_{n+1}$ . La condition de la collocation est posée au milieux de chaque intervalle, notamment  $d\hat{x}/dx_\tau = f(x_\tau, u_\tau)$ . Alors, des contraintes supplémentaires s'écrivent :

$$\Delta = f_\tau - \hat{x}'_\tau$$

Dans des travaux plus récentes l'approximation utilise B-spline (Betts, 2001) et au lieu de la méthode de Gauss qui ne pose la contrainte que sur des point internes de segments, on utilise la méthode de Lobatto ou les points au fin de segments sont également les points de collocation.

On s'est aperçu que la méthode de la collocation directe (à la base de polynôme d'Hermite) est équivalente la transcription directe qui utilise la méthode implicite de Runge-Kutte.

- c/ "Tir multiple".** L'autre type de méthodes ciblées à la réduction de la dimension de problème non linéaire s'appelle 'tir multiple' (multiple shooting). L'idée réside de réunir quelques pas d'intégration et calculer l'erreur (écart final) à la fin de intervalle réuni. Cette approche a été utilisé par Enright (Enright, 1991), Conway (Conway, 2002). Notons que dans

le cas extrême quand nous avons un seul segment et plusieurs pas d'intégration cette méthode devient le tir direct (par analogie de celle que l'on utilise pour le problème indirect).

Faisons quelques remarques générales consternant la méthode directe :

- souvent la dimension de problème est si grande qu'elle ne permet de résoudre le problème en temps raisonnable
- dans le cas complexe le problème a des milles équations et contraintes, alors la dérivation de la matrice  $c(x)$  et la tâche difficile, dans ce cas, la factorisation avec le complément de Schur peut être utilisé (Betts, 2001), (Gill et al., 1981)
- l'inconvénient le plus important, ce qu'il n'existe pas la condition suffisante pour garantir l'optimalité globale de la solution, car si la conjecture initiale est loin de la solution, la méthode peut converger vers un extremum local. C'est pourquoi la solution étaient trouvé par ce type de méthode demande une vérification supplémentaire.

## 2.2 Méthodes non optimales a priori

Cette partie est consacrée à la commande sous optimale. Les méthodes présentées au-dessus visent à donner des stratégies optimales, mais ces contrôles en boucle ouverte sont assez sensibles aux perturbations. Le remède est de utiliser a priori un contrôle de type 'feedback'. Nous allons présenter deux méthodes 1) 'steering method', ou "semi-feedback", et 2) stabilisation.

### Semi-feedback

Premier type de méthodes essayent de créer l'histoire optimale du mouvement par maximisation la vitesse de changement les paramètres orbitaux (Dadebo, McAuley, & McLellan, 1998), (Kluever, 1997b), (Kluever, 1997a), (Matogawa, 1983), (Spitzer, 1995) :

$$\frac{da}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \quad (25)$$



c'est-à-dire que l'on définit quatre feedbacks  $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_\Omega$  par

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_a(X) &= \arg \max_u \left\| \frac{da}{dt}(X, u) \right\| \\ \mathbf{u}_e(X) &= \arg \max_u \left\| \frac{de}{dt}(X, u) \right\| \\ \mathbf{u}_i(X) &= \arg \max_u \left\| \frac{di}{dt}(X, u) \right\| \\ \mathbf{u}_\Omega(X) &= \arg \max_u \left\| \frac{d\Omega}{dt}(X, u) \right\|\end{aligned}$$

Ces lois maximisent les corrections de paramètres séparément. Pour corriger le paramètres simultanément on introduit la fonction  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u} = \frac{G_a \mathbf{u}_a + G_e \mathbf{u}_e + G_i \mathbf{u}_i + G_\Omega \mathbf{u}_\Omega}{\|G_a \mathbf{u}_a + G_e \mathbf{u}_e + G_i \mathbf{u}_i + G_\Omega \mathbf{u}_\Omega\|}, \quad (26)$$

$G_a, G_e, G_i, G_\Omega$  étant des fonctions de  $t$  dans la forme suivante :

$$G(t) = G_0 + G_1 t + G_2 t^2 \quad (27)$$

Alors, le problème s'optimise par rapport aux paramètres  $G$  et au temps de l'apparition de 'coast' arcs pendant chaque *arc* de poussée (Kluever & O'Shaughnessy, 2000), (Tebbani et al., 2001).

## Stabilisation

Pour un système

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (28)$$

le problème de la stabilisation (par feedback) d'un point d'équilibre  $\bar{X}$  est celui de trouver un contrôle de la forme  $u(X)$  qui rende ce point  $\bar{X}$  asymptotiquement stable, c'est-à-dire tel que toute solution du système bouclé  $\dot{X} = f(X, u(X))$  converge vers  $\bar{X}$  sans s'en éloigner trop pendant la phase transitoire. On peut aussi parler de stabiliser une trajectoire  $t \mapsto \bar{X}(t)$ , c'est-à-dire concevoir  $u(X, t)$  tel que cette trajectoire soit (uniformément) asymptotiquement stable au prix de choisir un contrôle pas très lisse au voisinage de cette

trajectoire cible, on peut demander de converger en temps fini plutôt qu'asymptotiquement.

Une très bonne référence pour la théorie de la *stabilité* du mouvement, ou des équations différentielles  $\dot{X} = F(X, y)$  est l'ouvrage (Hahn, 1967). Il y est bien décrit ce qu'est une fonction de Lyapunov, i.e. une fonction  $V$  telle que

$$\begin{aligned} V(t, X) &\rightarrow +\infty \text{ si } |X| \rightarrow +\infty, \\ \forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, & V(t, X) > 0, \\ \forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, & \nabla V(X, t)^T F(X, t) < 0 \end{aligned}$$

et son intérêt pour l'étude de la stabilité. Son existence entraîne la stabilité asymptotique. Dans le cas où l'on a seulement  $\nabla V(X, t)^T F(X, t) \leq 0$  —on parle alors parfois de *fonction de Lyapunov au sens large*—, on conclut à la stabilité (non asymptotique, c'est-à-dire sans convergence) en général, et à la stabilité asymptotique sous réserve que la seule trajectoire  $X(t)$  telle que  $F(X(t), t) \nabla V(X(t), t)$  soit identiquement nul soit le point d'équilibre, ou la trajectoire visé(e) («principe d'invariance de LaSalle»).

L'outil fonction de Lyapunov est aussi beaucoup utilisé pour la stabilisation, voir par exemple (Coron, 1999) ou l'ouvrage récent (Bacciotti & Rosier, 2001). L'idée est de rechercher une fonction telle qu'il existe un feedback qui en fasse une fonction de Lyapunov du système bouclé. Il se trouve que l'on peut caractériser cela sans faire référence à l'existence de ce feedback. On appelle *fonction de Lyapunov de contrôle* (CLF) pour le système (28), une fonction  $V$  telle que

$$\begin{aligned} V(t, X) &\rightarrow +\infty \text{ si } |X| \rightarrow +\infty, \\ \forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, & V(t, X) > 0, \\ \forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, & \\ & \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } \dot{V}(X, u, t) = \nabla V(X, t)^T f(X, u, t) < 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Si il existe un feedback stabilisant continu, ou différentiable,  $u = u(X, t)$ , alors (théorèmes de Lyapunov inverse, cf. (Hahn, 1967)), il existe une fonction de Lyapunov pour le système bouclé, et cette fonction vérifie les propriétés ci-dessus ( $\exists u$  est obtenu en prenant  $u = u(X, t)$ ). Le théorème d'Artstein dit que, réciproquement, l'existence d'une CLF entraîne la possibilité de construire très facilement un feedback stabilisant un peu abstrait («relaxed feedback» dans le

cas général) mais continue, et même différentiable sauf à la cible dans le cas d'un système affine par rapport aux contrôles

$$\dot{X} = f(X, t, u) = f_0(X, t) + \sum_{i=1}^m f_i(X, t) u_i \quad (30)$$

et tous les systèmes que nous allons rencontrer sont de cette forme. La recherche d'une CLF est une tâche difficile en général, bien que moins délicate que celle d'une fonction de Lyapunov pour une équation différentielle sans contrôle, car plus sous-déterminée.

On peut également parler de CLF *au sens large* si la dernière ligne se lit  $\exists u \in \mathbb{R}^m$  s.t.  $\nabla V(X, t)^T f(X, u, t) \leq 0$  au lieu de  $< 0$ . Dans ce cas, on peut construire un contrôle feedback qui fasse décroître  $V$ , au sens large, mais il reste à vérifier ensuite les conditions du principe de LaSalle. Dans le cas de systèmes affines comme (28), une intégrale première de  $f_0$  (qu'on appelle le champ de dérive), c'est-à-dire une fonction  $V$  telle que

$$\nabla V(X, t)^T f_0(X, t) = 0 \quad (31)$$

est évidemment une CLF au sens large (en prenant  $u = 0$  pour réaliser « $\exists u$ »). Et de fait, un contrôle<sup>2</sup>

$$u_i = -\nabla V(X, t)^T f_i(X, t), \forall i \in [1, m], u = (u_1, \dots, u_m). \quad (32)$$

conduit à

$$\dot{V}(X, t) = - \sum_{i=1}^m (\nabla V(X, t)^T f_i(X, t))^2 \leq 0. \quad (33)$$

Ces idées ont été utilisées dans (Jurjevic & Quinn, 1978), d'où le nom de méthode dite «de Jurdjevic-Quinn», encore appelée «damping control» car le control (32) simule un amortisseur (frottement fluide). Évidemment, il reste en général à vérifier les conditions du principe de LaSalle; des conditions suffisantes pour que ce soit la cas sont données dans de nombreux articles; on peut à nouveau consulter (Bacciotti & Rosier, 2001).

---

2. Au lieu de ce contrôle précis, on peut bien sur utiliser d'autres  $u(x)$  tels que  $\dot{V}$  soit non positif comme dans (33). Une possibilité est, bien sûr, de choisir  $u$  qui rende  $\dot{V}$  le plus négatif possible, c'est-à-dire  $u(X, t)$  qui minimise  $\dot{V}(X, u, t)$  pour chaque  $(X, t)$ . Ceci est développé dans (Vincent & W., 1997, §5.3).

Pour le contrôle de 5 paramètres orbitaux du satellite (changement d'orbite sans rendez-vous), cette idée est appliquée dans la littérature par

- Ilgen en 1992-93, voir (Ilgen, 1993) (c'est en réalité un transfert 3D  $(a, e, i)$  qui y est réalisé),
- Coron, Praly et Chitour en 1997-99, voir (Coron, 1999, §3.2.1, pp. 332-338) où cela est traité en exemple (des explications plus détaillées étant contenue dans le rapport CNES (Chitour, Coron, & Praly, 1997), a priori confidentiel), et
- J.E Marsden et coauteurs dans le très récent (Chang, Chichka, & Marsden, 2002), qui retrouvent essentiellement, dans un autre formalisme, les résultats donnés comme exemple dans (Coron, 1999).

Toute fonction  $V$  qui ne dépend que des paramètres orbitaux  $(a, e_x, e_y, h_x, h_y)$  est évidemment une intégrale première de la dérive, c'est-à-dire qu'elle est constante si les contrôles sont mis à zéros. L'idée est donc de choisir une telle fonction qui soit minimale sur l'orbite visée, et qui soit telle que, lorsqu'on applique le "damping control" de type (32), les conditions de LaSalle soient satisfaites.

Notons que cela ne réalise pas le *rendez-vous* en six paramètres. Pour réaliser cela avec cette méthode de type Lyapunov, il faudrait disposer d'une fonction qui soit positive partout et ne soit nulle que quand le satellite est non seulement sur l'orbite visée mais à la bonne longitude.

Si l'on construit naïvement une fonction des six paramètres qui vérifie cela, par exemple en ajoutant à la fonction de  $(p, e_x, e_y, h_x, h_y)$  la carré de la différence entre  $L$  et le  $L$  visé (on peut faire moins naïf, bien sûr), on n'obtient pas une CLF (29) car, à cause du terme  $\nabla V(X, t)^T f_0(X)$ , il y a des points  $(X, t)$  pour lesquels  $\dot{V}(X, u, t) > 0$  pour tout  $u$ . On suggère dans (Coron, 1999, §3.2.1) —et à nouveau cela est développé dans le rapport (Chitour et al., 1997)— d'utiliser les techniques dites de «forwarding» ou d'«ajout d'intégration» (Mazenc & Praly, 1996; Sépulchre, Janković, & Kokotović, 1997) pour déduire une fonction de Lyapunov 6D de la fonction de Lyapunov 5D aisément obtenue. Ce processus est hélas très consommateur en temps de calcul car il demande d'intégrer à chaque pas la trajectoire. Des améliorations importantes de cette méthodes sont nécessaires.

**Remarque sur le coût** La méthode de stabilisation fournit une commande relativement robuste (on peut espérer obtenir une méthode efficace qui "subisse

les éclipses mais n'ait pas à les prévoir dans la stratégie), mais elle ne sous-entend aucune optimisation de la commande par quelque critère que ce soit. Il sera nécessaire, si une telle méthode est utilisée d'évaluer a posteriori le coût, et si possible dévaluer l'impact de la «forme» des fonctions de Lyapunov choisies sur ce coût. Cette possibilité a été notée par exemple par Ilgen (Ilgen, 1993) qui suggère de choisir les trois paramètres qu'il laisse libre dans sa fonction de Lyapunov pour optimiser un coût.

## Chapitre 3

# Résultats numériques

### 3.0.1 Comparaison les résultats de la stabilisation avec commande optimale

Dans cette partie nous proposons les résultats du calcul des trajectoires par la méthode de la stabilisation § 2.2 et celle de la Commande Optimale à base de moyennation (Geffroy, 1997). Pour déguiser la qualité de méthodes et comparer le temps de transfert nous allons étudier les transfert les plus communs.

Notement nous etudions les cas suivants :

orbite de départ : MEO, GTO+, supGTO+, GSO.

orbite cible : GEO.

Les parametres du satellite

$$F_{max}=0.35 \text{ N}$$

$$Isp = 2000 \text{ s}$$

1) Le Cas de transfert MEO à GEO a les parametres suivantes :

L'orbite initiale MEO :	L'orbite finale GEO :
$a_0 = 21378.1 \text{ km}$	$a_f = 42164.2 \text{ km}$
$e_0 = 0$	$e_f = 0$
$i_0 = 0^0 \dots 40^0$	$i_f = 0^0$
$\Omega_0 = \Omega_0(t)$	
$\omega_0 = 0^0$	
$L_0 = 0$	

2) Le Cas de transfert GTO+ à GEO a les parametres suivantes :

L'orbite initiale GTO+ :	L'orbite finale GEO :
$a_0 = 29271.1 \text{ km}$	$a_f = 42164.2 \text{ km}$
$e_0 = 0.440468$	$e_f = 0$
$i_0 = 0^0 \dots 40^0$	$i_f = 0^0$
$\Omega_0 = \Omega_0(t)$	
$\omega_0 = 0^0$	
$L_0 = 0$	

3) Le Cas de transfert de supGTO+ à GEO a les parametres suivantes :

L'orbite initiale supGTO+ :	L'orbite finale GEO :
$a_0 = 41378.1 \text{ km}$	$a_f = 42164.2 \text{ km}$
$e_0 = 0.604184$	$e_f = 0$
$i_0 = 0^0 \dots 40^0$	$i_f = 0^0$
$\Omega_0 = \Omega_0(t)$	
$\omega_0 = 0^0$	
$L_0 = 0$	

4) Le Cas de transfert GSO à GEO a les parametres suivantes :

L'orbite initiale GSO :	L'orbite finale GEO :
$a_0 = 42164.2 \text{ km}$	$a_f = 42164.2 \text{ km}$
$e_0 = 0.611563$	$e_f = 0$
$i_0 = 0^0 \dots 40^0$	$i_f = 0^0$
$\Omega_0 = \Omega_0(t)$	
$\omega_0 = 0^0$	
$L_0 = 0$	

Sur ces simulations, on n'a pas fait figurer  $e_y$  et  $h_y$ , qui restent à peu près à zéro.

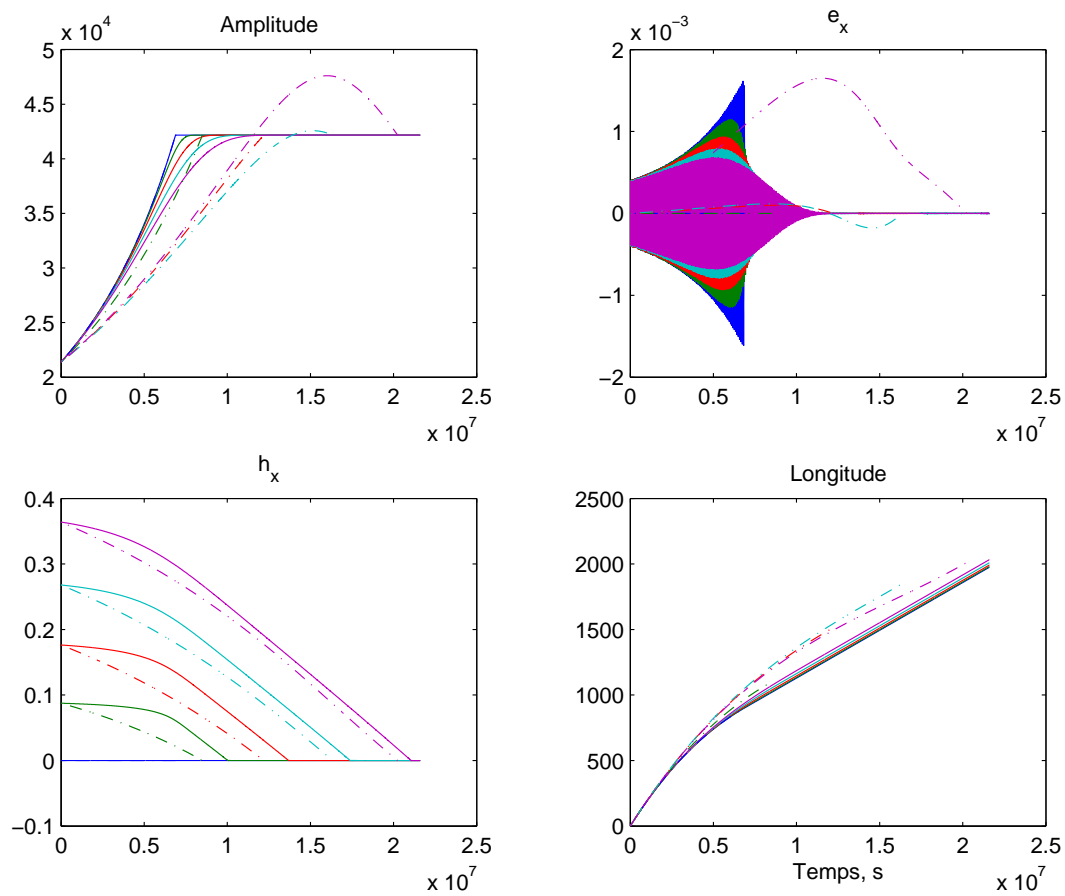


FIG. 3.1 – MEO à GEO. Evolution des paramètres orbitaux, lignes pleines - stabilisation de Lyapunov, lignes pointillées - les résultats de Mipelec (contrôle optimale)



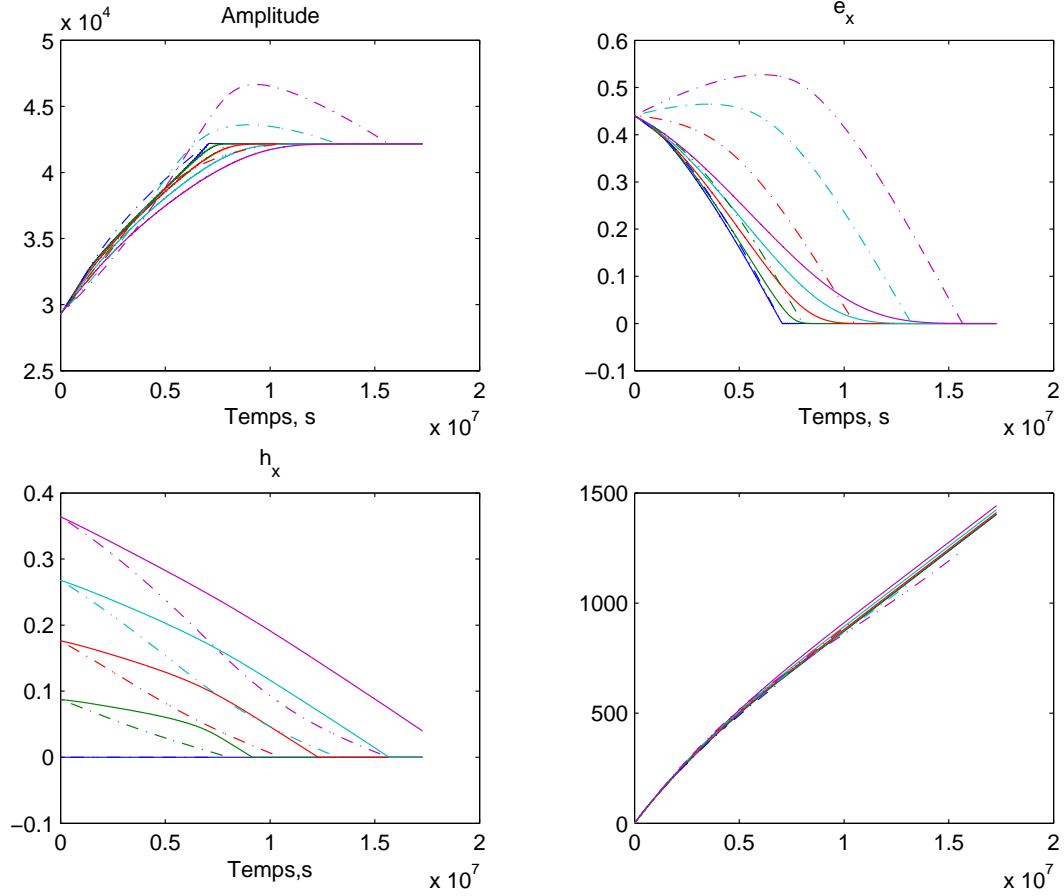


FIG. 3.2 – *GTO+ à GEO. Evolution des parametres orbitaux, lignes pleines - stabilisation de Lyapunov, lignes pointillées - les resultats de Mipelec (controle optimale)*

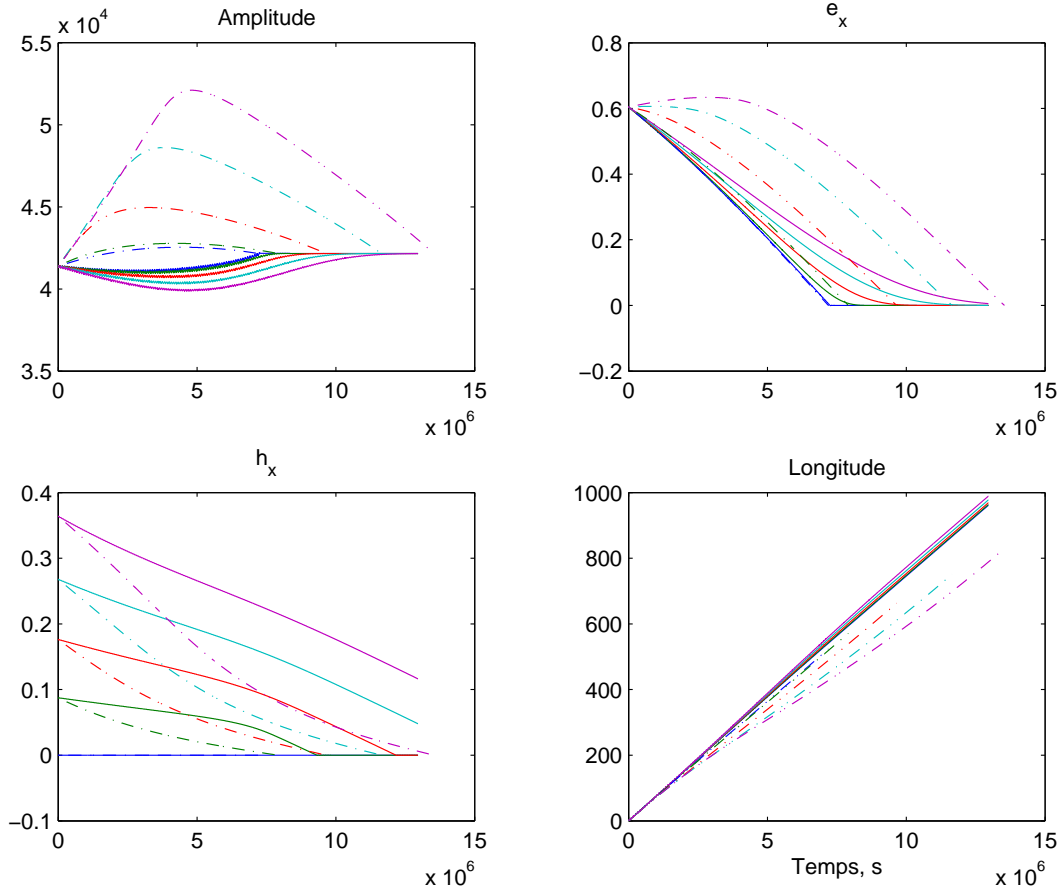


FIG. 3.3 – *SupGTO+ à GEO. Evolution des parametres orbitaux, lignes pleines - stabilisation de Lyapunov, lignes pointillées - les resultats de Mipelec (controlé optimale)*

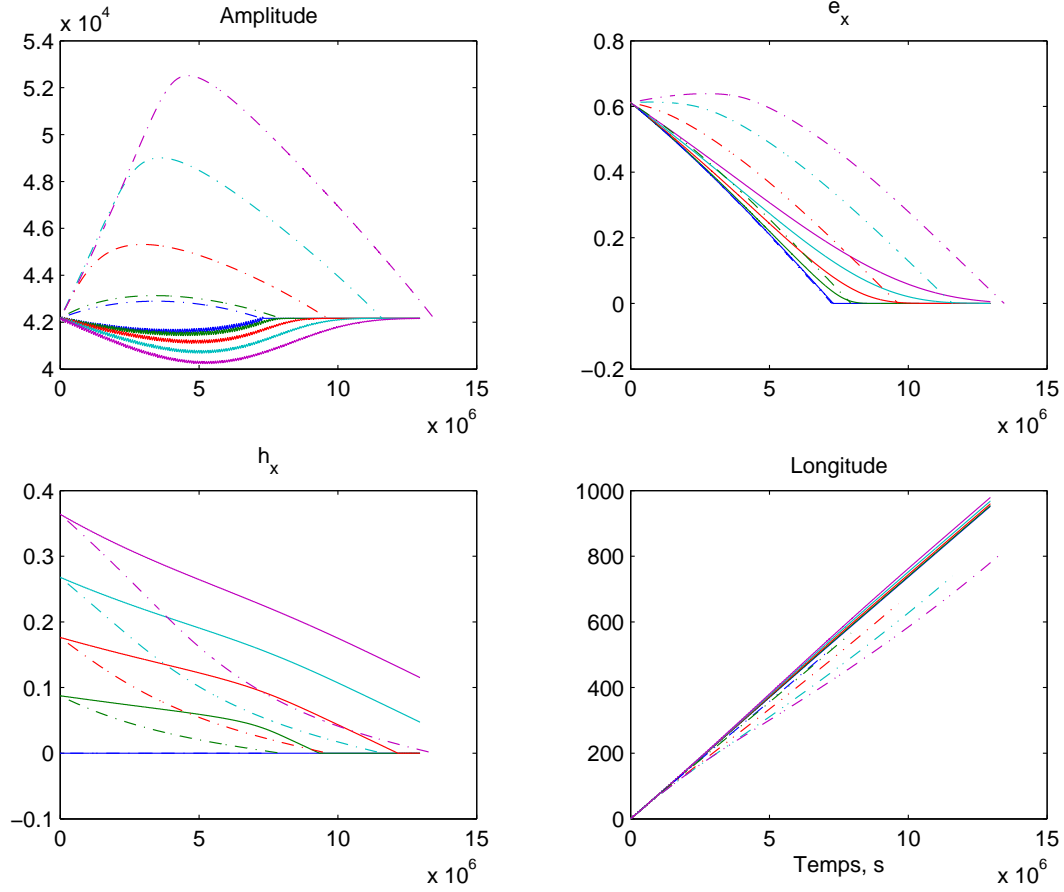


FIG. 3.4 – GSO à GEO. Evolution des parametres orbitaux, lignes pleines - stabilisation de Lyapunov, lignes pointillées - les resultats de Mipelec (controle optimale)

Tirons quelques conclusions :

- a/ Le temps de transfert dans le cas de stabilisation environ 10-20 % plus que le temps optimal. Notons également que la convergence n'est pas la même pour tous les paramètres orbitaux dans le cas de stabilisation. Ce problème peut être allégé par le choix de coefficients de coût dans la fonction de Lyapunov correspondant les paramètres orbitaux. Ce problème, pourtant ne permet pas estimer assez précisément le temps de transfert cas le choix de paramètres restent imperique.
- b/ Deuxième remarque concerne la loi de commande. il est clair que le manœuvre optimale demande souvent dépasser l'orbite ciblée pour y revenir après avoir corrigé les autres paramètres orbitaux (voir fig. 3.2 Amplitude). Hélas, cela n'est pas reflété dans l'approche de stabilisation quand on impose l'inégalité (33).

Malgré ces deux remarques cette approche est intéressante à étudier car elle apporte une grande compacité de calcul (dans le cas de la stabilisation classique) et ne demande pas de vérification supplémentaires pour des contraintes.



## Chapitre 4

# Conclusions et Perspectives

Il ressort de notre aperçu de la littérature que le problème de rendez-vous (6D) n'est jusqu'ici que très incomplètement traité dans le cas de poussées faibles.

Les méthodes de contrôle optimal sont à perfectionner, mais on propose à court terme d'étudier en profondeur les méthodes de «stabilisation», dans le but d'effectuer des manoeuvres 6D qui soient certes sous-optimales mais moins sensibles aux contraintes comme les éclipses.



## Bibliographie

- Bacciotti, A., & Rosier, L. (2001). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag.
- Battin, R. (1987). *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. AIAA Education Series, New York.
- Bertrand, R. (2001). *Optimisation de trajectoires interplanétaires sous hypothèses de faible poussée*. Phd thesis, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des systèmes, Toulouse.
- Betts, J. T. (1993). Using sparse nonlinear programming to compute low thrust orbit transfer. *J. Astronaut. Sci.*, 41(3), 349-371.
- Betts, J. T. (1994). Optimal interplanetary orbit transfers by direct transcription. *J. Astronaut. Sci.*, 42(3), 247-268.
- Betts, J. T. (1998). Survey of numerical methods for trajectory optimization. *J. Guid. Control Dyn.*, 21(2), 193-207.
- Betts, J. T. (2001). *Practical methods for optimal control using nonlinear programming* (Vol. 3). SIAM.
- Bryson, J., Arthur, E., & Ho, Y. C. (1975). *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C. (Optimization, estimation, and control, Revised printing)
- Carrou, J.-P. (1995). *Mécanique spatiale*. Cépaduès-éditions.
- Chang, D. E., Chichka, D. F., & Marsden, J. (2002). Lyapunov-based transfer between elliptic keplerian orbits. *Disc. & Cont. Dyn. Systems (ser. B)*, 2(1), 57-67.
- Chitour, Y., Coron, J. M., & Praly, L. (1997). *Une nouvelle approche pour le transfert orbital à l'aide de moteurs ioniques* (rapport). CNES. (confidentiel)



- Conway, B. A. (2002). Efficient methods for the determination of optimal low thrust trajectories. *2nd International Symposium, Toulouse, France, 18-20 juin 2002*.
- Coron, J.-M. (1999). On the stabilization of some nonlinear control systems: results, tools, and applications. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (montreal, qc, 1998)* (p. 307-367). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
- Dadebo, S. A., McAuley, K. B., & McLellan, P. J. (1998). On the computation of optimal singular and bang-bang controls. *Optimal Control Appl. Methods*, 19(4), 287–297.
- Edelbaum, T., Sackett, L., & Malchow, H. (1973). Optimal low thrust geocentric transfer. In *Aiaa 10th electric propulsion conference* (p. paper No 73-1074). Lake Tahoe, Nevada.
- Enright, P. J. (1991). *Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using direct transcription and nonlinear programming*. Phd thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Ferrier, C., & Epenoy, R. (2001). Optimal control for engines with electro-ionic propulsion under constraint of eclipse. *Acta Astronautica*, 48(4), 181-192.
- Gath, P., & Well, K. (2001). Trajectory optimization using a combination of direct multiple shooting and collocation. *Paper AIAA-2001-4047*, 1-8.
- Geffroy, S. (1997). *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal – application aux problèmes de transferts et rendez-vous orbitaux à poussée faible*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Geffroy, S., & Epenoy, R. (1997). Optimal low-thrust transfers with constraints - generalization of averaging techniques. *Acta Astronautica*, 41(4), 133-149.
- Gill, P., Murray, W., & Wright, M. (1981). *Practical optimization*. Academic Press, London.
- Hahn, W. (1967). *Stability of motion* (Vol. 138). Springer-Verlag, Berlin, New-York.
- Hargraves, C., & Paris, S. (1987). Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *J. Guid. Control Dyn.*, 10, 338-342.

- Ilgen, M. R. (1993). Low thrust OTV guidance using Lyapunov optimal feedback control techniques. *Paper AAS 93-680*, 1527-45.
- Jurjevic, V., & Quinn, J. P. (1978). Controllability and stability. *J. of Diff. Equations*, 28, 381-389.
- Kluever, C. A. (1997a). Optimal low-thrust interplanetary trajectories by direct method techniques. *J. Astronaut. Sci.*, 45(3), 247-262.
- Kluever, C. A. (1997b). Optimal earth-moon trajectories using combined chemical-electric propulsion. *J. Guid. Control Dyn.*, 20(2), 253-258.
- Kluever, C. A., & O'Shaughnessy, D. (2000). Trajectory-tracking guidance law for low-thrust earth-orbit transfers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(4), 754-6.
- Matogawa, Y. (1983). Optimum low thrust transfer to geosynchronous orbit. *Acta Astronaut.*, 10, 467-478.
- Mazenc, F., & Praly, L. (1996). Adding integrations, saturated controls and stabilization of feedforward systems. *IEEE Trans. Automat. Control*.
- Montenbruck, O., & Gill, E. (2000). *Satellite orbits. Models, methods and applications*. Springer-Verlag.
- Neta, B., & Vallado, D. (1998). On satellite umbra/penumbra entry and exit position. *J. Astronaut. Sci.*, 46(1), 91-103.
- Pontryagin, L. S., Boltjanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., & Mitchenko, E. (1974). *Théorie mathématique des processus optimaux*. Moscou: Editions MIR.
- Pytlak, R. (1999). *Numerical methods for optimal control problems with state constraints*. Berlin: Springer-Verlag.
- Sépulchre, R., Janković, M., & Kokotović, P. V. (1997). *Constructive nonlinear control*. Springer-Verlag.
- Spencer, D., & Culp, R. (1995). Designing continuous-thrust low-earth-orbit to geosynchronous-earth-orbit transfers. *J. Spacecraft and Rockets*, 32(6), 1033-1038.
- Spitzer, A. (1995). Near optimal transfer orbit trajectory using electric propulsion. *Paper AAS 95-215*, 1031-44.
- Tebbani, S., Bertrand, R., Bernussou, J., Racois, M., & Romero, M. (2001). Comparison of direct and indirect methods in optimizing multiple-burn

low-thrust orbit transfers. *IAF-01-A.5.07, 52nd International Astronautical Congress, Toulouse, France, 1-5 oct. 2001*, 1-10.

Vincent, T., & W., G. (1997). *Nonlinear and optimal control systems*. John Wiley & Sons, Inc.



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399